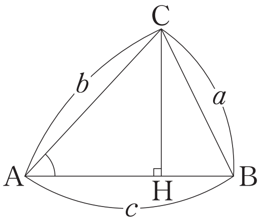
PART2 余弦定理

要点① 余弦定理

ここでは，△ABC の 1 辺の長さ a を，その対角の余弦 $\cos A$ と他の 2 つの辺の長さ b, c で表す。

[1] A，B がともに鋭角のとき

頂点 C から辺 AB に垂線 CH を下ろす。



直角三角形 BCH で，三平方の定理より

$$BC^2 = CH^2 + BH^2$$

すなわち $a^2 = CH^2 + BH^2$ ……①

また，直角三角形 ACH において

CH＝ ……②

AH＝

よって $BH = AB - AH = c - b\cos A$ ……③

①，②，③より

$$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$$

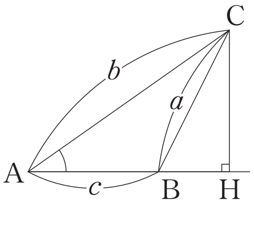
$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

よって，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立つ。

[2] B が鈍角のとき

頂点 C から辺 AB の延長上に垂線 CH を下ろすと，



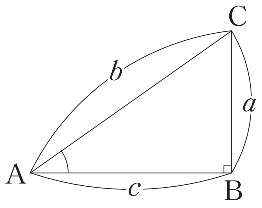
$BH = AH - AB = b\cos A - c$ より

$$a^2 = CH^2 + BH^2$$

$$= (b\sin A)^2 + (b\cos A - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

よって，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立つ。

[3] B が直角のとき，$a^2 = b^2 - c^2$ が成り立つ。



また，$b\cos A = c$ であるから

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2c\cdot c$$

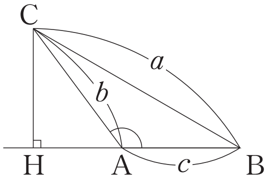
$$= b^2 - c^2$$

$$= a^2$$

よって，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ は，B が直角の場合も

成り立つ。

[4]　A が鈍角のとき



頂点 C から辺 AB の延長上に垂線 CH を下ろすと

直角三角形 ACH において

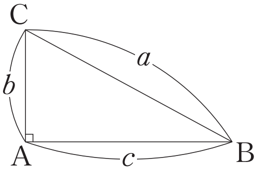
CH＝

AH＝

よって，$a^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

よって，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ が成り立つ。

[5]　A が直角のとき，$a^2=b^2+c^2$ が成り立つ。



また，$\cos A=\cos 90^\circ=$　であるから

$b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2$

よって，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ は，A が直角の場合も成り立つ。

以上より，次の定理が成り立つ。

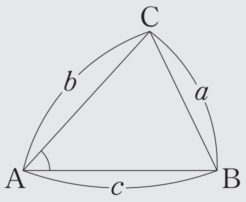
余弦定理

△ABC について

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

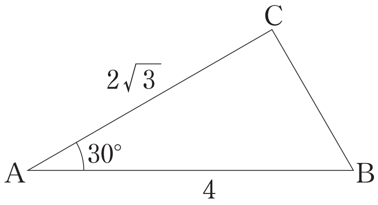
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



例　△ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=4$，$A=30^\circ$ のとき，a を求める。

余弦定理より



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$=$$

$$=12+16-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=4$$

$a>0$ より $a=2$

2 △ABC において，次の問いに答えよ。

(1) $b=2\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45^\circ$ のとき，a を求めよ。

(2) $c=3$，$a=2$，$B=120^\circ$ のとき，b を求めよ。

Point Pickup

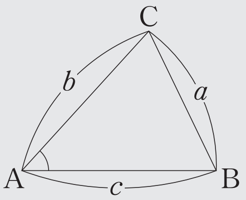
余弦定理

△ABC について

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



2 辺の長さとその間の角の大きさが与えられたとき，余弦定理を用いて，残りの辺の長さを求めることができる。

第13講　PART2 確認問題

1 △ABC において，$a=4$，$c=3$，$B=60^\circ$ のとき，

$b=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。

2 △ABC において，$a=3$，$b=2\sqrt{2}$，$C=135^\circ$ のとき，

$c=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

PART2 余弦定理

2 △ABC において，次の問いに答えよ。

(1) $b=2\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45^\circ$ のとき，a を求めよ。

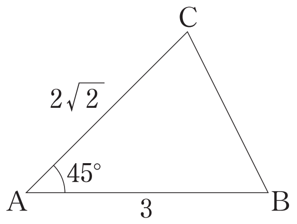
(2) $c=3$，$a=2$，$B=120^\circ$ のとき，b を求めよ。

[解答]

(1) 余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=(2\sqrt{2})^2+3^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos45^\circ$$
$$=8+9-2\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5$$

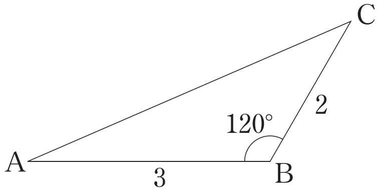
$a>0$ より　$a=\sqrt{5}$



(2) 余弦定理より

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos120^\circ$$
$$=9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

$b>0$ より $b=\sqrt{19}$



第13講　PART2 確認問題 解答

1 [正解] アイ：13

[解説]

余弦定理より，

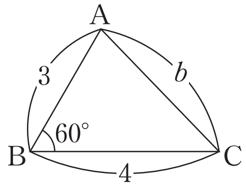
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$ [A]

$$=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos60^\circ$$

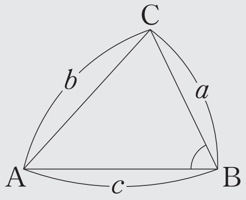
$$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}$$

$$=13$$

$b>0$ より，$\boldsymbol{b=\sqrt{13}}$



[A]　余弦定理
△ABC において，
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$



2 [正解] ウエ：29

[解説]

余弦定理より，

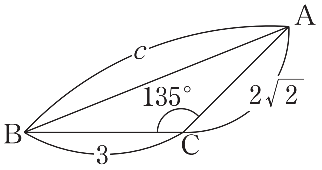
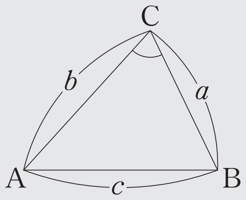
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$ [B]

$$=3^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cos135^\circ$$

$$=9+8-2\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=29$$

$c>0$ より，$\boldsymbol{c=\sqrt{29}}$



[B]　余弦定理
△ABC において，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$